Vektoren – Grundbegriffe

Bisher wurde mit Hilfe von Koordinaten die Lage von Punkten beschrieben. In unserem Beispiel „Umschlagbahnhof Eifeltor“ sollte ein Container mit Hilfe eines Krans auf einen Zug gehoben werden. Um herauszufinden, welche Befehle man zur Steuerung des Krans in den Steuerungscomputer eingeben muss, haben wir die Koordinaten der Eckpunkte des Containers bestimmt: zunächst in seiner Ausgangsposition und anschließend in der Position, in die er durch den Kran gehoben wurde (nachdem er also im Koordinatensystem verschoben wurde).

Im Folgenden schauen wir uns an, wie man diese Verschiebung (von Punkten) mathematisch beschreiben kann.

Man erreicht vom Ausgangspunkt A den zugehörigen Zielpunkt A', indem man

-6 Einheiten in Richtung der x_1-Achse,
4 Einheiten in Richtung der x_2-Achse und anschließend
1 Einheit in Richtung der x_3-Achse

geht.

Diese Verschiebung kann durch den **Vektor** $\begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ angegeben werden.

Da dieser Vektor beschreibt, wie man von dem Ausgangspunkt A den Zielpunkt A' erreicht, kann der Vektor auch durch die Angabe des Ausgangs- und des Zielpunktes angegeben werden. Man schreibt:

$$\overrightarrow{AA'} = \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

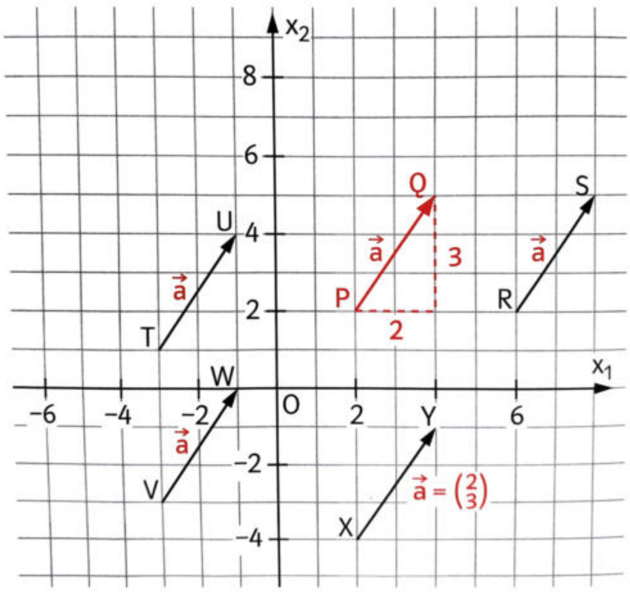
Dieser Vektor $\begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ beschreibt nicht nur, wie man von A nach A' gelangt, sondern auch, wie man zum Ausgangspunkt B den Zielpunkt B', zum Ausgangspunkt C den Zielpunkt C' etc. erhält.
Vektoren bezeichnet man deshalb häufig durch kleine Buchstaben, über die man einen Pfeil schreibt:

$$\vec{a} = \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{DD'} = \cdots = \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Zeichnerisch kann ein Vektor durch Pfeile angegeben werden, die von den jeweiligen Ausgangspunkten zu den dazugehörenden Zielpunkten führen.
Alle Pfeile, die zu einem Vektor gehören, sind zueinander parallel, gleich lang und gleich orientiert. Eine solche Menge von Pfeilen ist bereits festgelegt, wenn man einen ihrer Pfeile, einen **Repräsentanten**, kennt.

Beispiel:

Die dargestellten Pfeile gehören alle zum gleichen Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, weil sie alle die gleiche Verschiebung beschreiben.



Allgemein gilt:

(I) Rechnerische Ermittlung eines Vektors

Um die Koordinaten eines Verschiebungsvektors rechnerisch zu bestimmen, subtrahiert man von den Koordinaten des Zielpunktes die Koordinaten des Ausgangspunktes. Sind z.B. die Punkte $A(2/4)$ und $B(8/5)$ gegeben, berechnet man den Vektor $\overrightarrow{AB}$ wie folgt:

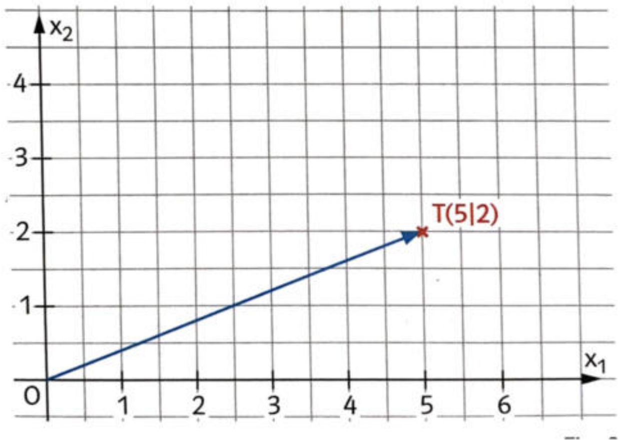
$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 8-2 \\ 5-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(II) Ortsvektor

Setzt man einen Vektor im Ursprung an, kann man dadurch einen Punkt eindeutig festlegen. Für den Punkt $T(5/2)$ erhält man z.B.:

$$\overrightarrow{OT} = \begin{pmatrix} 5-0 \\ 2-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Den Vektor $\overrightarrow{OT}$ nennt man **Ortsvektor** des Punktes T.

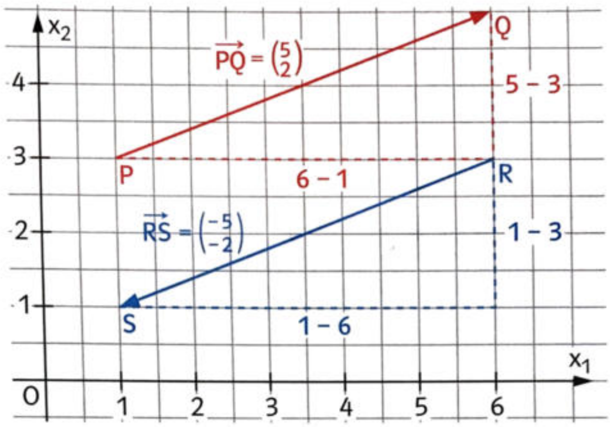


(III) Gegenvektor

Der Vektor $-\vec{a}$ ist der **Gegenvektor** zum Vektor $\vec{a}$. Die Pfeile, die zum Vektor $-\vec{a}$ gehören, sind parallel zum Vektor $\vec{a}$ und gleich lang, aber entgegengesetzt orientiert zu den Pfeilen des Vektors $\vec{a}$.

Beispiel:

Der Vektor $\overrightarrow{RS}$ ist der Gegenvektor zum Vektor $\overrightarrow{PQ}$, also $\overrightarrow{RS} = -\overrightarrow{PQ}$.



(III) Nullvektor

Der Vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, der jeden Punkt auf sich selbst abbildet, heißt **Nullvektor** und wird mit $\vec{o}$ bezeichnet. Er ist der einzige Vektor, der nicht mit Pfeilen dargestellt werden kann.

Zusammenfassung:

Die **Koordinaten** des **Vektors** $\overrightarrow{AB}$ kann man aus den Koordinaten der Punkte $A(a_1/a_2/a_3)$ und $B(b_1/b_2/b_3)$ bestimmen. Es gilt:

$$\overrightarrow{AB} =$$

Der Vektor $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$ heißt ___________________________ des Punktes $P(p_1/p_2/p_3)$.

Ist ein Vektor $\vec{a}$ gegeben, so bezeichnet man $-\vec{a}$ als ___________________________ . Seine Pfeile sind ____________________ und _________________________ , aber entgegengesetzt orientiert.

Der Vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ heißt __________________________ . Er kann nicht mit _________________ dargestellt werden.